Maple wird olympisch!

Auf der Mathematik Olympiade 2009 in Lübeck im Mai dieses Jahres wetteiferten knapp 200 Schüler um den richtigen Weg ins Ziel.

Ganz ohne Doping: wie Maple bei der Vorbereitung auf die Aufgaben animieren und unterstützen kann.

Bericht über die 48. Bundesrunde der Matheolympiade in Lübeck

Autor Sonnhard Graubner

7. August, 2009

Die 48. Bundesrunde der Mathematikolympiade hat vom 03.05. bis zum 06.05.2009 in Lübeck Schleswig-Holstein stattgefunden. An zwei Tagen stellten sich insgesamt 193 Schüler und Schülerinnen anspruchsvollen mathematischen Problemen um in zwei Klausuren die besten als Preisträger unter sich zu ermitteln. Ein Programmheft (1.112KB) welches man sich unter www.mo2009.de downloaden kann, gibt Aufschluss über ein umfangreiches und buntes Ramenprogramm, welches von Sport und Kultur alles beeinhaltete, um die knappe Freizeit für die Teilnehmer nach den anstengenden Klausuren so angenehm wie möglich zu gestalten. Außerdem trugen 149 angemeldete Korrektoren zu einem reibungslosen Ablauf und zügiger Korrektur der Schülerarbeiten bei. Die 14 Schüler aus Sachsen, deren Namen man auch auf obiger Webseite nachlesen kann, wurden von Dr. Horst Ocholt und Stefanie Tille begleitet. Die Klausuraufgaben der Klassen 8 bis 13 und kurzzeitig auch die dazugehjörigen Lösungen sind unter www.mathematik-olympiaden.de/akt_aufgaben.html einzusehen. Die mathematischen Probleme, die bei Bundesrunden zu lösen sind, sind oft recht anspruchsvoll. Dies möchte ich an einem Beispiel erläutern und auf die Lösung mal etwas ausführlicher eingehen und den Einsatz von Maple 13 zur Diskussion stellen. Es ist die folgende Aufgabe:

481341

Man untersuche, für welche nichtnegativen reellen Zahlen a die Gleichung

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a \qquad (1)$$

mindestens eine reelle Lösung x mit $0 \le x \le 1$ besitzt.Für jedes solches a gebe man alle derartigen Lösungen x an.

Lösung: Wir wollen nun zunächst eine mögliche Schülerlösung vorstellen und mit ausreichend Kommentar versehen.

Wegen $0 \le x \le 1$ sind beide Wurzeln im Bereich der reellen Zahlen definiert.Potenziert man die Gleichung (1) zum Exponenten drei ergibt sich nach dem binomischen Satz folgender Term:

$$1+x+3\sqrt[3]{(1+x)^2}\sqrt[3]{1-x}+3\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{(1-x)^2}+1-x=a^3$$

Nun wird durch geschicktes Ausklammern obige Gleichung wie folgt geschrieben:

$$3\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=a^3-2$$

Wegen der Nichtnegativität der dabei auftretenden dritten Wurzeln muss $a^3 \geq 2$, d.h. $a \geq \sqrt[3]{2}$ gelten. Nun können wir in obige Gleichung für $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a$ einsetzen und haben dann die folgende Gleichung

$$3\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}a = a^2 - 2 \tag{2}$$

Wir können ohne weiteres die Gleichung (2) durch a teilen, denn für $a = 0$ ist (wie man leicht nachprüft) die Gleichung (1) für $0 \leq x \leq 1$ nicht erfüllt. Damit hat man

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x} &= \frac{a^3-2}{a} \\
1 - x^2 &= \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3 \\
x^2 &= 1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3
\end{aligned}$$

wegen $x \geq 0$ muss nun

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3 &\geq 3 \\
1 &\geq \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3 \\
3a &\geq a^3 - 2 \\
0 &\geq a^3 - 3a - 2
\end{aligned}$$

Nun ist $a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a+1)^2$ wie man leicht nachrechnet, folglich ist obige Ungleichung für alle a mit $a \geq 2$ erfüllt. Somit haben wir für die Existenz von mindestens einer rellen lösung die Bedingung $\sqrt[3]{2} \leq a \leq 2$ gefunden.In unserem Fall ist die Lösung sogar eindeutig und wir haben $x = \sqrt{1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3}$ bekommen. Gilt nun für diese Lösung auch

$$\begin{aligned}
0 \leq x &\leq 1 \\
\sqrt{1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3} &\geq 1 \Leftrightarrow \\
1 &\geq \frac{a^3-2}{a} \Leftrightarrow \\
0 &\geq a^3 - 3a - 2
\end{aligned}$$

Dies gilt aber genau dann, wenn $a \leq 2$ ist. Weiter rechnet man nach (was hier hier nicht tun wollen), dass $\sqrt{1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq \sqrt[3]{2}$.

Fazit: Es gibt genau eine reelle Lösung $0 \leq x \leq 1$ mit $x = \sqrt{1 - \left(\frac{a^3-2}{a}\right)^3}$ falls $\sqrt[3]{2} \leq a \leq 2$ gilt. Damit ist das Problem im Sinne der Aufgabenstellung vollständig gelöst. Wie oben angekündigt, wollen wir das Problem einmal mit Maple 13 lösen.